LOGARITHME NÉPÉRIEN

1. Définition

a. Propriété

La fonction exponentielle étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0\ ;+\infty[$, pour tout réel a strictement positif l'équation $e^x = a$ admet une unique solution.

b. logarithme

Pour tout réel a strictement positif, l'unique solution de l'équation $e^x = a$ s'appelle : logarithme népérien de a. On le note $\ln(a)$.

c. propriétés immédiates

Pour tout réel $a > 0$, $e^{\ln(a)} = a$ et pour tout réel b, $\ln(e^b) = b$.

Pour tout x et tout $y > 0$, $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$.

2. Propriétés algébriques

Pour tout réels a et b strictement positifs, on a :

a. $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$.

b. $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

c. $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$.

d. $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$

e. Pour tout entier n, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

3. Limites variations et représentation graphique

a. La fonction logarithme népérien : $x \rightarrow \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$.

Conséquence : Pour a et b strictement positifs,

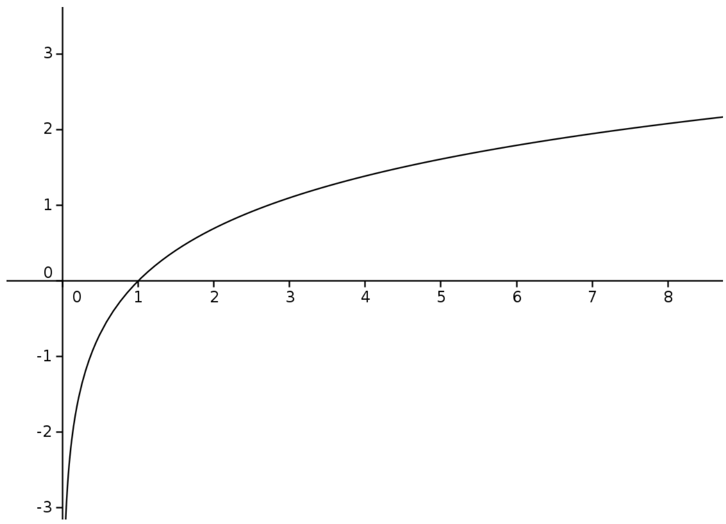
$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

c. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	$+\infty$

d. Et la représentation graphique :



4. Deux limites

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

5. Dérivées

a. La fonction logarithme népérien est dérivable et sa dérivée est la fonction inverse

(sur $]0\ ;+\infty[$). donc, si $f(x) = \ln(x)$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Si u est une fonction strictement positive, dérivable et si $f(x) = \ln(u(x))$ alors

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.